



MATEMATICA

Le pagine che seguono costituiscono **un ripasso degli argomenti** del programma di matematica della scuola media necessari per affrontare i primi mesi di un liceo scientifico.

Ogni argomento è introdotto da una breve sintesi di **teoria**; leggila con attenzione prima di svolgere gli esercizi. E' importante che tu sappia non solo eseguire gli esercizi, ma anche perché si fa in quel modo.

Evita di usare la calcolatrice quando fai gli esercizi di matematica; in classe e nelle verifiche quest'anno non la dovrai usare, e se invece a casa la usi poi ti troverai male a fare i conti da solo. Hai scelto di frequentare un liceo scientifico, quindi è importante che tu sia capace di svolgere dei conti a mente o per iscritto.

Gli esercizi vanno **svolti su un quaderno, tranne quelli con i puntini** (.....), che possono essere svolti negli appositi spazi. Fai attenzione all'ordine, perché è importante che quello che scrivi venga compreso anche dagli altri!

Se non riesci a eseguire qualche esercizio copia comunque il testo e fai quello che riesci a fare; poi scrivi un punto interrogativo ? accanto all'esercizio stesso.

Svolgi anche le due **prove di verifica** alla fine del fascicolo.

Durante la prima settimana di scuola ti verrà sottoposto un test d'ingresso su questi stessi argomenti, per la verifica dei prerequisiti.

Capitolo 1: L'insieme N dei numeri naturali

L'insieme N dei numeri naturali è costituito dallo zero e dai numeri interi positivi:

$$N = \{0,1,2,3,\dots\}$$

Proprietà delle potenze:

Stessa base	$(+3)^5 \times (+3)^7 = (+3)^{12}$
	$(+3)^9 : (+3)^5 = (+3)^4$
Stesso esponente	$(+3)^9 \times (+5)^9 = (+15)^9$
	$(+21)^9 : (+7)^9 = (+3)^9$
Potenza di potenza	$[(+2)^3]^5 = (+2)^{15}$

RUOLO DELLO ZERO NELLE OPERAZIONI

- $3 + 0 = 3$
- $3 - 0 = 3$
- $3 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 0 = 0$
- $3:0 = \text{OPERAZIONE IMPOSSIBILE (senza risultato)}$
- $0:0 = \text{OPERAZIONE INDETERMINATA}$
- $0:3 = 0$
- $3^0 = 1$
- $0^0 = \text{operazione indeterminata}$
- $0^3 = 0$

Esercizio 1:

Scrivi il risultato di ciascuna operazione:

$$0:5 = .. \quad 0 \times 5 = .. \quad 0 \times 0 = .. \quad 5:0 = .. \quad 0:0 = .. \quad 5 \times 0 = ..$$

Esercizio 2:

Risolvi le seguenti espressioni sul quaderno senza calcolatrice e poi controlla il risultato usando la calcolatrice:

$$2A) \quad \{75 - [30 : (2+3) + 14] : 5 + 1\} : 24 + (29 - 17) : 4 =$$

$$2B) \quad (27 : 3 + 1) : 5 + \{28 - [12 - (3 \cdot 5 + 1) : 4] \cdot 3\} : 2 =$$

$$2C) \quad (24 : 4 + 2) \cdot (50 - 35 : 5 + 2) : 9 - \{7 + [(21 : 7 + 1) + 5] : 9\} \cdot 5 =$$

Esercizio 3:

Scrivi il risultato di ciascuna operazione:

$$7^0 = \dots \quad 0^7 = \dots \quad 0^0 = \dots$$

Esercizio 4:

Risolvi le seguenti espressioni senza calcolatrice e applicando le proprietà delle potenze:

A) $\{(24^2:3^2 - 5^3:5 - 2^3 \cdot 3):(3^2 + 2^3 - 12) + [(10^2 - 5^2 \cdot 3):5 - 23^0] \cdot 3^2\}:13 = [R: 3]$

B) $[(54^2:9^2 - 2^8:2^3 + 7^3:7^2) - (24 - 5 \cdot 2^2 - 8^0)]^5:(20 - 2^3 \cdot 2)^5 - 3^3 = [R: 5]$

C) $\{[(2^5)^2:(2^3)^2 - (4^2 - 4):(6 - 2^4:2^2)]:(2^2 + 3^2 - 2^3) + 2^3:2^3\}^3 - (30 - 25)^2 = [R: 2]$

D) $\{[40 - (6^7:6^5)^4:(18:3)^6 + 4]:4 \cdot [1 + (5 - 24^2:12^2) \cdot (27^2:9^2 - 7)]\}^2 - 35 = [R = 1]$

Scomposizione in fattori primi; MCD e mcm.

I numeri primi minori di 100 sono:

2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47-53-59-61-67-71-73-79-83-89-97

Criteria di divisibilità:

Un numero è divisibile per...	se....
2	Se è pari
3	Se la somma delle cifre è divisibile per 3
9	Se la somma delle cifre è divisibile per 9
5	Se termina con 0 o con 5
25	Se termina con 00, 25, 50, 75
11	Se la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è zero oppure un multiplo di 11
10	Se termina con 0
100	Se termina con 00
1000	Se termina con 000

Per calcolare il Massimo Comune Divisore (MCD) bisogna

1. scomporre in fattori primi i numeri dati
2. moltiplicare i fattori comuni con l'esponente più piccolo

Per calcolare il minimo comune multiplo (mcm) bisogna

1. scomporre in fattori primi i numeri dati
2. moltiplicare i fattori comuni e non comuni con l'esponente più grande

Esercizio 5:

Calcola M.C.D. e il m.cm. dei seguenti gruppi di numeri:

a) 12, 15 [MCD = 3; mcm = 60]

b) 15, 21 [MCD = 3; mcm = 105]

c) 55, 77, 121 [MCD = 11; mcm = 385]

d) 20, 70 [MCD = 10; mcm = 140]

e) 18, 24 [MCD = 6; mcm = 72]

f) 16, 24, 40 [MCD = 8; mcm = 240]

h) 13, 12 [MCD = 1; mcm = 156]

i) 15, 30, 45 [MCD = 3; mcm = 90]

Capitolo 2: L'insieme Z dei numeri interi relativi

L'insieme dei numeri interi relativi è costituito dai numeri interi positivi, interi negativi e dallo zero, cioè:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

Per quanto riguarda la moltiplicazione (e la divisione) vale la seguente “regola dei segni”:

- se i numeri sono concordi il risultato ha segno positivo
- se i numeri sono discordi il risultato ha segno negativo

Riassumiamola nella seguente tabella:

×	+	-
+	+	-
-	-	+

Esercizio 1

Semplifica le seguenti espressioni con i numeri interi relativi:

A) $[3 - (-3)^2]^4 : (-2^2 - 2)^3 - [(-4)^3 - (-3)^3 + (-2)^3] : [-3^0 + (-2)^4] =$ [R: - 3]

B) $7 \cdot (-2)^3 : [7 + (6 + 6 \cdot 7^2 : 14) : (-3)] - 2 \cdot [(-12)^2 : 6^2 \cdot 2 - 2 \cdot 3]^4 =$ [R: - 4]

C) $(10^3 \cdot 10^4)^5 : (10^8)^4 : 10^2$ [10]

Esercizio 2

Traduci le seguenti frasi in espressioni e semplificalle:

A) “Sottrai dal cubo di -3 il quadrato della differenza tra +3 e +2; dividi poi la differenza così ottenuta per l'opposto del quadrato di -2.” [R: +7]

B) “Moltiplica la somma di +10 con il cubo di -2 per la differenza tra il quadrato dell'opposto di +5 e il quadrato di +6 .” [R: - 22]

Capitolo 3: L'insieme dei numeri razionali Q

Le scritte $\frac{7}{5}$, $\frac{-5}{3}$, $\frac{1}{-3}$ si chiamano **frazioni** e indicano il risultato delle divisione tra due numeri (numeratore e denominatore della frazione); quindi in generale una frazione è data dalla scrittura $\frac{a}{b}$, dove a e b sono numeri relativi e $b \neq 0$.

Tutte le frazioni $\frac{2}{6}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{100}{300}$; rappresentano lo stesso numero, che si dice **numero razionale**.

Un frazione può essere **ridotta ai minimi termini**: $\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$ (cioè numeratore e denominatore vengono divisi per tutti i loro divisori comuni e sono primi tra loro)

Esercizio 1:

Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni:

$$\frac{14}{21}, \frac{30}{40}, \frac{27}{72}, \frac{60}{70}, \frac{90}{320}, \frac{88}{121}, \frac{48}{108}, \frac{78}{208}$$

Dalla frazione al numero decimale e viceversa

1. **Per trasformare una frazione in numero decimale** si deve eseguire la divisione; per esempio:

- $\frac{7}{20} = 7:20 = 0,35$
- $\frac{13}{15} = 13:15 = 0,8\bar{6}$

2. **Per trasformare un numero decimale in frazione:**

- **numero decimale limitato:** $4,96 = \frac{496}{100} = \frac{124}{25}$
- **numero decimale periodico:** $0,25\bar{8} = 0, \underbrace{25}_{\text{due cifre}} \underbrace{\bar{8}}_{\text{una cifra}} = \frac{258-25}{9 \text{ un} \quad 00 \text{ due zeri}} = \frac{233}{900}$

Esercizio 2:

Trasforma le seguenti frazioni in decimali eseguendo la divisione:

$$\frac{15}{9} = \quad \frac{29}{24} = \quad \frac{90}{60} = \quad \frac{10}{3} =$$

Esercizio 3:

Trasforma i seguenti decimali in frazioni usando la regola corretta e verifica poi con la calcolatrice (dividi il numeratore per il denominatore):

$$31,2 = \quad 0,5 = \quad 4,\bar{2} = \quad 1,\bar{3} = \quad 1,\bar{9} =$$

Ordinamento di numeri razionali.

a) $\frac{3}{5} < \frac{8}{5}$ (quindi se hanno lo stesso denominatore basta confrontare i numeratori)

b) $\frac{43}{20}$ e $\frac{17}{8}$ se non hanno lo stesso denominatore,

li riporto allo stesso denominatore $\rightarrow \frac{43}{20} = \frac{86}{40}$ e $\frac{17}{8} = \frac{85}{40}$

confrontando i numeratori vedo che $\frac{86}{40} > \frac{85}{40}$, quindi posso ordinare le frazioni iniziali $\rightarrow \frac{43}{20} > \frac{17}{8}$

Esercizio 4:

Confronta le seguenti coppie di frazioni riportando al minimo comune multiplo (metti <, >, =), e verifica poi con la calcolatrice:

$$\frac{5}{3} \dots \frac{4}{7};$$

$$\frac{7}{8} \dots \frac{5}{8};$$

$$\frac{8}{4} \dots \frac{99}{100};$$

$$\frac{5}{6} \dots \frac{5}{9};$$

$$\frac{1}{2} \dots \frac{1}{7}$$

Esercizio 5:

Risolvi i seguenti problemi con le frazioni:

A) In una gara di tiro a segno Aldo ha fatto 9 centri su 12, Bruno ne ha fatti 11 su 18 e Carlo 10 su 15. Chi è stato il più bravo?

B) Dario ha mangiato $\frac{1}{3}$ di torta e Franco $\frac{2}{5}$. Chi ne ha mangiata di più?

Esercizio 6:

A) Calcola $\frac{1}{4}$ del doppio di 20 (R:10)

B) Calcola $\frac{3}{4}$ del doppio di 10 (R:15)

C) Calcola $\frac{2}{3}$ del triplo di 7 (R:14);

Esercizio 7:

Traduci le frasi in espressioni e calcolane il valore:

A) Sottrai dal quadrato di $\frac{2}{5}$ il cubo di $\frac{1}{2}$. (R: $\frac{7}{200}$)

B) Addiziona al quoziente fra $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ il quadrato di $\frac{1}{5}$. (R: $\frac{233}{200}$)

Esercizio 8:

Calcola il valore delle seguenti espressioni sul ruolo dello zero nelle operazioni:

$$(-3)^0 = \dots \quad (\text{R:1})$$

$$\left(\frac{2}{3} - 0,\bar{6}\right)^0 = \dots \quad (\text{R: indeterminata})$$

$$\left[5 - \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{2}\right] : 7 = \dots \quad (\text{R:0})$$

$$6. \left[\frac{14}{5} : \frac{2}{5} - 7 \right] = \dots\dots\dots \text{(R: impossibile)}$$

Esercizio 9:

Calcola le seguenti espressioni, applicando dove possibile le proprietà delle potenze:

A) Esercizio guidato:

$$\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4} + \frac{5}{2} \right)^2 : \left(\frac{39}{4} \right)^2 =$$

Esegui la moltiplicazione $\rightarrow = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \right)^2 : \left(\frac{39}{4} \right)^2 =$

Esegui la somma nella parentesi $\rightarrow = \left(\frac{\quad}{4} \right)^2 : \left(\frac{39}{4} \right)^2 =$

Somma i numeri al numeratore $\rightarrow = \left(\frac{\quad}{4} \right)^2 : \left(\frac{39}{4} \right)^2 =$

Applica le proprietà delle potenze con lo stesso esponente $\rightarrow = \left(\frac{13}{4} : \frac{39}{4} \right)^2 =$

Esegui la divisione in parentesi $\rightarrow = \left(\frac{13}{4} \cdot \frac{4}{39} \right)^2 =$

Semplifica $\rightarrow = \left(\frac{1}{3} \right)^2 =$

Risolvi la potenza $\rightarrow = \frac{1}{9}$

B) $10^7 : 10^5 - \frac{10^5}{10^3} + 10^2 \cdot 10 - 10^8 : 10^6$ [900]

C) $\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{3}{10} \right)^2 : \left(2 + \frac{1}{4} - \frac{9}{5} \right)^2$ [R: $\frac{16}{9}$]

D) $\left[\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) : \left(1 - \frac{3}{5} \right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^2 : \left(3 + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \right)^2$ [R: 0]

E) $\left(1 - \frac{3}{7} \right)^{-2} + \left(-\frac{3}{2} \right)^3 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{-3}$ [R: $-\frac{21}{16}$]

Esercizio 10

Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali sostituendo alla lettera il valore indicato:

A) $(2a - ab)b$ $a = -3, b = -2$ [+24]

B) $-2a^2 - 3ab + 3b^2$ $a = -3, b = -2$ [-24]

C) $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} + \frac{2a}{8}$ $a = -3$ [-1]

Capitolo 4: Proporzioni e percentuali

Risolvi una proporzione: $6 : 8 = x : 32 \rightarrow x = \frac{6 \cdot 32}{8}$, e semplificando $x = 24$.

Esercizio 1

Risolvi le seguenti proporzioni:

a) $x : 9 = 1 : 2,25$ [R: $x = 4$]

b) $\frac{5}{3} : \frac{10}{9} = x : \frac{4}{7}$ [R: $x = \frac{6}{7}$]

c) $0,25 : \frac{5}{12} = x : 0,4$ [R: $x = \frac{4}{15}$]

d) $(2 - \frac{7}{4})^2 : (1 - \frac{1}{2})^3 = \frac{2}{5} : x$ [R: $x = \frac{4}{5}$]

Le frazioni e le proporzioni possono essere utilizzate per calcolare **percentuali** e risolvere problemi con le percentuali.

Esempio: calcoliamo il 40% del numero 60. $40\% \text{ di } 60 = \frac{40}{100} \cdot 60 = 24$

Esempio: in una scuola sono stati promossi 448 studenti su un totale di 560; qual è la percentuale dei promossi rispetto al totale degli studenti?

Con le proporzioni: $448 : 560 = x : 100$, che risolta dà: $x = \frac{448 \cdot 100}{560} = 80$, cioè l'80% del totale.

Oppure con le frazioni: $x = \frac{448}{560} = 0,8$ quindi $x = 0,8 = 0,80 = \frac{80}{100} = 80\%$

Esercizio 2:

Risolvi i seguenti problemi sulle percentuali:

A) Calcolare il 20% di 36 [R: 7,2]

B) calcolare il 60% di 24.000 [R: 14.400]

C) Se 180 è il 90% di un numero, qual è il numero? [R: 200]

D) La prima tappa di un viaggio di 650 km è pari al 13% dell'intero percorso; calcola la lunghezza dell'intero percorso. [R: 84,5 km]

E) Ho comprato una bicicletta e ho pagato 312 euro di acconto, cioè il 60% del prezzo intero; quanto costa la bicicletta? [R: 520 euro]

F) In un seggio elettorale hanno votato 714 elettori su 850 iscritti alle liste; qual è stata la percentuale dei votanti? [R: 84%]

Capitolo 5: Mettiti alla prova

PROVA DI VERIFICA A:

Svolgi la seguente prova in un'ora

1) Calcola usando le proprietà delle potenze: $(2^{12} \cdot 2^7) : (2^3)^6 - (2^2)^3 + (-5)(-2)(+6)$

[-2]

2) Ruolo dello zero nelle operazioni:

$$0:5 = .. \quad \dots \quad 0 \times 0 = \dots \quad 0:0 = \dots \quad 7^0 = \dots \quad 0^0 = \dots$$

3) Traduci la frase in espressione e calcolane il valore: Dividi la differenza tra $+\frac{3}{4}$ e $+\frac{2}{3}$ per la differenza tra $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{6}$

$\left[-\frac{1}{16}\right]$

4) Trasforma i seguenti decimali in frazioni e verifica con la calcolatrice il risultato:

$$1,\bar{4} \quad 2,45 \quad 5,1\bar{5}$$

$\left[\frac{13}{9} ; \frac{49}{20} ; \frac{232}{45}\right]$

5) Una ditta pratica lo sconto del 15% sull'acquisto del materiale edile; qual è lo sconto per una fornitura di 1446 euro?

[R: 216,90 euro]

6) Calcola la seguente espressione: $(a^2 - 5)(a^2 + 5) - (a^2 - 3)^2$

$[6a^2 - 34]$

PROVA DI VERIFICA B:

Svolgi la seguente prova in un'ora :

1) Calcola MCD e mcm tra i seguenti numeri: 48, 60, 72, 132

[MCD = 12; mcm = 7920]

2) Calcola la seguente espressione, applicando le proprietà delle potenze:

$$\left(-\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{2} - 1\right)^3 - \left(\frac{9}{4} - 2 + \frac{1}{3}\right)^2 : \left(-\frac{7}{4}\right)^2$$

$\left[+\frac{1}{72}\right]$

3) Calcola il valore della seguente espressione: $3a^2 - 6ab + b^4$ sostituendo $a = -3$ $b = -2$

[+7]

4) Completa:

il 30% di 156 è uguale a.....

6 ragazzi su 40 portano gli occhiali, cioè il% del totale

[46,8 ; 15%]

5) Calcola la seguente espressione: $2x(x + 4) - (-2x)^2 + (3 + x)(2 - 2x) + (2x)^2$

[4x + 6]